

## 14b. Surištųjų svyruoklių tyrimas

### Užduotis

1. Išmatuoti rišančiosios spyruoklės standumą.
2. Nustatyti dviejų svyruoklių savituosius ciklinius dažnius ir suderinti, kad jie būtų vienodi.
3. Nustatyti svyruoklių ryšio stiprio koeficientą, panaudojant išmatuotus tyrimo įrangos parametrus, ir palyginti jį su ryšio stiprio koeficientu, nustatytu tiriant dažnius fazinių ir antifazinių svyravimų bei mušimų režimuose.

### Pagrindiniai teoriniai klausimai

1. Surištųjų svyruoklių dinamikos lygtys ir jų sprendiniai.
2. Svyravimų mūšos priežastis.

### Tyrimo metodika

Jei dvi vienodo savitojo ciklinio dažnio  $\omega_0$  svyruoklės, surištos spyruokle (rišančiąja spyruokle), paleidžiamos svyruoti gravitaciniame lauke, tai pagal 1 pav. parodytus žymėjimus, mažo atlenkimo kampo atveju sunkio jėgos momentas

$$M_{s,0} = m g L \sin \phi_0 \approx m g L \phi_0, \quad (1)$$

o ryšio spyruoklės tamprumo jėgos momentas

$$M_{F,0} = -k x_0 l \cos \phi_0 \approx -k x_0 l, \quad (2)$$

kur  $k$  - spyruoklės standumas,  $x_0$  - jos pailgėjimas,  $l$  - ryšio ilgis,  $m$  - svyruoklės masė,  $L$  - jos ilgis,  $g$  - laisvojo kritimo pagreitis,  $\phi_0$  - uokrypio nuo pusiausvyros padėties kampas, matuojamas radianais.

Jei svyruoklė  $P_1$  yra atlenkta kampu  $\phi_1$ , o  $P_2$  - kampu  $\phi_2$  (1 pav.) ir abi vienu metu paleistos svyruoti, tai bendru atveju pagal pagrindinį sukamojo judesio dinamikos dėsnį

$$I \ddot{\phi} = M, \quad (3)$$

kur  $I$  yra svyruoklės inercijos momentas jos sukimosi ašies atžvilgiu, atsilenkimo kampo atroji išvestinė pagal laiką  $\ddot{\phi}$  yra kampinis pagreitis, o  $M$  - suminis jėgų momentas.

Svyruokles veikiantys jų sunkio ir jas veikiančios rišančiosios spyruoklės tamprumo jėgos momentai sumuojasi, todėl turime dviejų diferencialinių lygčių sistemą:

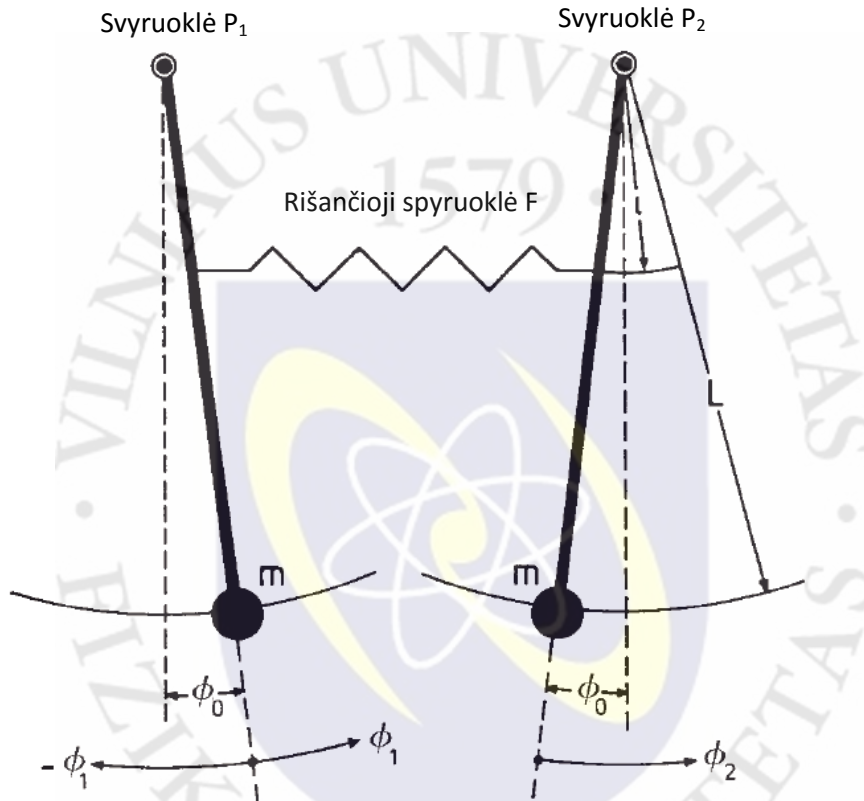
$$I \ddot{\phi}_1 = M_1 = -mgL\phi_1 + kl^2(\phi_2 - \phi_1); \quad I \ddot{\phi}_2 = M_2 = -mgL\phi_2 + kl^2(\phi_2 - \phi_1). \quad (4)$$

Lygčių sistemoje (4) įvedę žymėjimus

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I} \text{ ir } \Omega^2 = \frac{kl^2}{I} \quad (5)$$

gauname:

$$\ddot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1 = -\Omega^2 (\phi_2 - \phi_1); \quad \ddot{\phi}_2 + \omega_0^2 \phi_2 = \Omega^2 (\phi_2 - \phi_1) \quad (6)$$



1 pav. Surištųjų svyruoklių schema.

Skirtingiems svyravimų režimams galime užrašyti tokias pradines sąlygas:

a) fazinių (tų pačių fazių) svyravimų:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_A; \quad \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 = 0; \quad (7)$$

b) antifazinių (priešingų fazių) svyravimų:

$$-\phi_1 = \phi_2 = \phi_A; \quad \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2 = 2\dot{\phi}_A; \quad (8)$$

c) svyravimų mušimų:

$$-\phi_1 = \phi_A; \phi_2 = 0; \phi_1 - \phi_2 = \phi_A. \quad (9)$$

Bendrieji diferencialinių lygčių sistemos (6) sprendiniai priklauso nuo pradinių sąlygų (7) - (9).

Fazinių svyravimų atveju, kai abi svyruoklės svyruoja sinchroniškai vienoda amplitude ir vienodu dažniu  $\omega_0$ , kuris lygus nesurištos svyruoklės savitajam dažniui,

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_A \cos \sqrt{\omega_0} t. \quad (10)$$

Antifazinių svyravimų atveju, kai abi svyruoklės svyruoja vienoda amplitude ir vienodu dažniu  $\omega_0$ , tačiau svyravimų fazių skirtumas yra  $\pi$  radianų,

$$\phi_1(t) = \phi_A \cos \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} t; \phi_2(t) = -\phi_A \cos \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} t. \quad (11)$$

Pagal formulę (11) svyravimų ciklinis dažnis

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \quad (12)$$

yra didesnis nei savitasis ciklinis dažnis  $\omega_0$  ir priklauso nuo ryšio ilgio  $l$ , nes pagal (5) nuo jo priklauso  $\Omega$ .

Vykstant mušimams,

$$\phi_1(t) = \phi_A \cos \left( \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t \right); \quad (13)$$

$$\phi_2(t) = -\phi_A \sin \left( \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} t \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} t \right), \quad (14)$$

o tai yra harmoninės dažnio  $0,5(\omega_c + \omega_0)$  funkcijos, kurių amplitudės yra moduluotos  $0,5(\omega_c - \omega_0)$  dažniu, kur ciklinių dažnių skirtumas  $\omega_c - \omega_0 = \omega_m$  yra vadinamas mušimų cikliniu dažniu. Tada, kai yra silpnas ryšys, t.y. kai  $\omega_0 \gg \Omega$ , svyruoklių cikliniai dažniai skiriasi savituoju jų cikliniu dažniu  $\omega_0$ :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0} < \omega_2 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \approx \omega_0 + \frac{\Omega^2}{2\omega_0}. \quad (15)$$

Svyruoklių ryšio stipris yra apibrėžiamas santykiu:

$$K = \frac{kl^2}{mgL + kl^2} \quad (16)$$

Iš (5), (10) ir (12) lygčių gauname:

$$K = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} = \frac{f_c^2 - f_0^2}{f_c^2 + f_0^2} = \frac{2f_1f_2}{f_1^2 + f_2^2} \quad (17)$$

Taigi, ryšio stiprį galima įvertinti ir pagal (15), išmatavus svyruoklių ir rišančiosios spyruoklės parametrus, ir pagal (16), nustčius svyruoklių svyravimų dažnius  $f_0, f_c, f_1$  ir  $f_2$  visuose trijuose režimuose.

### Tyrimo eiga



2 pav. Surištųjų svyruoklių tyrimo įranga (be pakabos pasvarų laikikliui ir pasvarų).

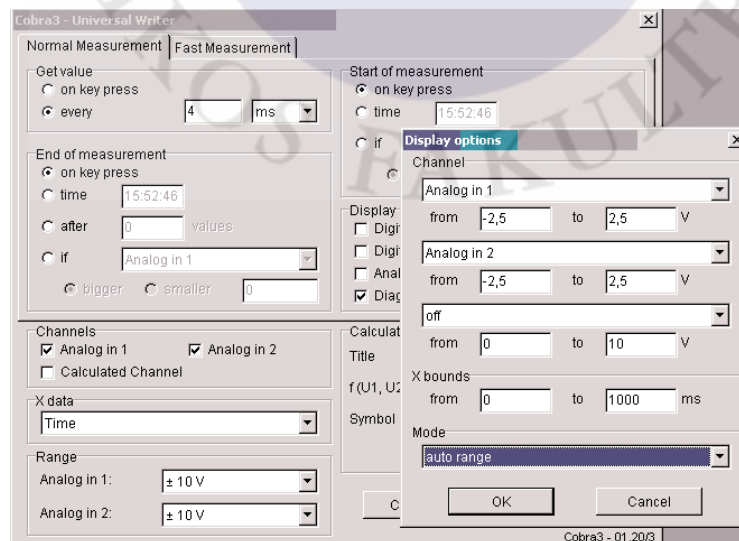
Rišančiosios spyruoklės standumą matuojame vieną jos galą pakabinę ant stovo, o kitame jos gale prikabinę 10 g masės pasvarų laikiklį. Ant pasvarų laikiklio padėję masės  $m_p$  pasvarą, liniuote išmatuojame pasvarų laikiklio aukščio pakitimą  $y$ . Negalima naudoti didesnės nei 50g masės pasvaro, nes tai, kaip nustatyta parengiant darbą, sukeltų liktinę spyruoklės deformaciją, po kurios ji taptų nebetinkama numatytam tyrimui. Spyruoklės tampriajai deformacijai galioja Huko dėsnis. Pusiausvyros padėtyje papildoma spyruoklės tamprumo jėga, atsiradusi dėl pasvaro padėjimo ant jo laikiklio, atsveria pasvaro sunkį, todėl standumas

$$k = \frac{m_p g}{y} \quad (18)$$

Pradedant darbą, tiriamos nesusietos svyruoklės (2 pav., tik be rišančiosios spyruoklės). Svyruoklių judesio jutiklių maitinimo gnybtai yra prijungiami prie maitinimo šaltinio nuolatinės įtampos DC gnybtų, o jų signalo gnybtai yra sujungti su įrenginiu Cobra3. Turi būti nustatyta 10 V maitinimo šaltinio įtampa, o įrenginio Cobra3 kanalų CH1 ir CH2 matavimų režiai turi būti nustatyti 10 V įtampos matavimui. Įrenginys Cobra3 yra prijungiamas prie kompiuterio per USB įvadą. Kompiuterio programa paleidžiama pasirinkus “Cobra3 Universal Writer Gauge”. Kompiuterio ekrane pasirinkus 3 pav. parodytus parametrus, tolesni matavimai atliekami programos nuorodomis. Apdorojant duomenis svyravimų cikliniam dažniui rasti rekomenduojama pasirinkti meniu “Analysis” ir “Fourier analysis” bei “Survey” funkcijas, kaip tai parodyta antifazinių svyravimų (4 – 6 pav.) ir mušimų (7 pav.) atvejais.

Tam, kad svyruoklė pradėtų svyruoti, jos strypelis pincetu atsargiai judinamas pirmyn ir atgal iki tol, kol nusistovi norimos amplitudės svyravimai abiejų svyruoklių plokštumoje. Taip galima išvengti nepageidaujamo skersinių svyravimų. Svyravimų periodą  $T_0$  nustatome iš kompiuteryje užregistruotos svyruoklės nuokrypio nuo pusiausvyros padėties priklausomybės nuo laiko. Periodo nustatymą pakartojame kiekvienai svyruoklei po keletą kartų. Abiejų svyruoklių svyravimų periodų vidurkiai  $\bar{T}_0$  paklaidų ribose turėtų sutapti. Jei periodai nesutampa, reikia tiek pakeisti vienos iš svyruoklių strypelio ilgį, kad periodai sutaptų paklaidų ribose. Svyruoklės ilgis keičiamas atpalaiduojant fiksuojančią veržlę, kuri yra ant svyruoklės svarelis smėigės. Pakeitus fiksavimo vietą, veržlė vėl užveržiama. Žinant periodą, nustatomas savitasis ciklinis dažnis:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \quad (19)$$



3 pav. Matavimo parametrų įvesties langas.

Nustačius savitąjį dažnį, tiriami surištųjų svyruoklių svyravimai. Rišančioji spyruoklė yra pritvirtinama jos galus įmeigiant į aneles plastikinėse movose, užmautose ant svyruoklių strypų tam tikru vienodu atstumu nuo svyruoklių sukimosi ašių  $l$ , kuri, kaip ir svyruoklės ilgį  $L$ , išmatuojame liniuote. Prieš pradėdant matavimus įsitikiname, kad tarp svyruoklių nėra elektrinio kontakto, nes tai blokuotų įrenginio Cobra3 jutiklių ir jo paties veikimą.

Channel modification

Source channel

1: t := Time

2: := [off]

Operation

f := x/1000

differentiate

integrate

progressive average value

Destination channel

add new y-channel

overwrite

into new measurement

as x-channel

as y-channel

Title: Time\_in\_seconds

Symbol: t

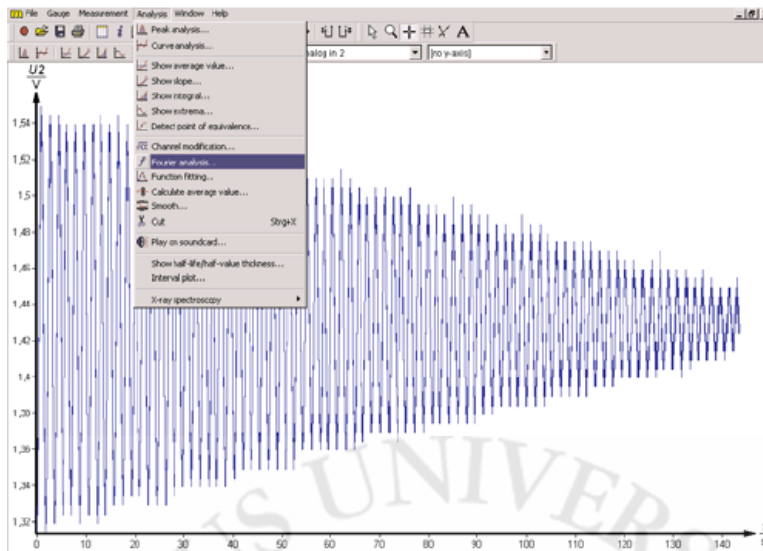
Unit: s

Calculate

Cancel

Help

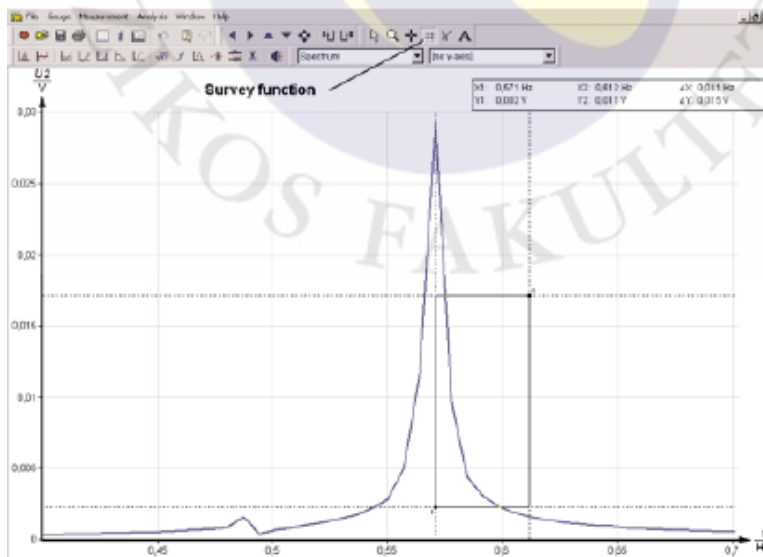
4 pav. Kanalo pasirinkimas.



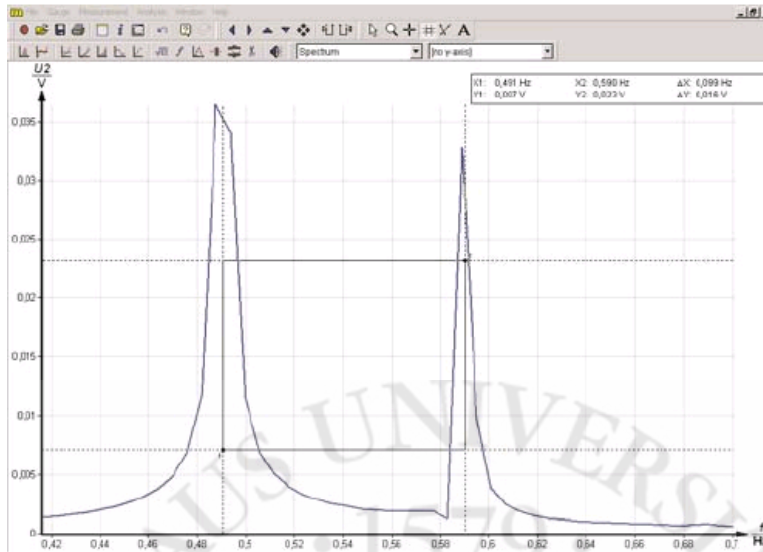
5 pav. Furjė algoritmo pasirinkimas antifazinių svyravimų kinetikos analizei.

Tiriant svyravimų priklausomybes nuo laiko reikia užtikrinti tokias pradines sąlygas:

- a) abi svyruoklės atlenkiamos tokiu pačiu kampu į tą pačią pusę ir vienu metu paleidžiamos svyruoti (fazinių svyravimų režimas);
- b) abi svyruoklės yra atlenkiamos tokiu pačiu kampu, bet į priešingas puses, ir vienu metu paleidžiamos svyruoti (antifazinių svyravimų režimas);
- c) viena svyruoklė yra prilaikoma pusiausvyros padėtyje, o kita svyruoklė atlenkiama ir paleidžiama svyruoti, nuo jos paleidimo momento nebeprilaikant ir pirmosios svyruoklės (mušimų režimas).



6 pav. Funkcijos “Survey” pasirinkimas ir antifazinių svyravimų dažnio pagal  $f_c$  nustatymas.



7 pav. Svyravimų dažnių  $f_1$  ir  $f_2$  nustatymas mušimų režime.

Svyruoklių ryšio stiprio koeficientui pagal (13) formulę apskaičiavimui reikia naudoti svyruoklės masę  $m = (1020 \pm 1)$  g, kuri jau yra nustatyta iš anksto pasvėrus svirtinėmis svarstyklėmis, Skaičiuojant taip pat naudojame išmatuotus svyruoklių ir rišančiosios spyruoklės parametrus. Svyravimų ryšio stiprio koeficientą pagal (14) sąryšį apskaičiuojame įrašę išmatuotas dažnių  $f_0, f_c, f_1$  ir  $f_2$  vertes.

Patikriname, ar vykstant mušimams dažnių skirtumas  $f_2 - f_1$  yra lygus svyruoklių savitajam dažniui  $f_0$ , kaip turėtų būti pagal (14).

### Paklaidų įvertinimas

Ryšio spyruoklės standumo paklaida, jei laisvojo kritimo pagreičio dydį  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  laikytume pakankamai tiksliai, pagal (15) yra:

$$\Delta k = k \sqrt{\left(\frac{\Delta m_p}{m_p}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}. \quad (20)$$

Svyruoklės savitojo ciklinio dažnio paklaida lygi svyravimų periodo  $T_0$  nustatymo paklaidai ar trukmės  $\tau$ , per kurią įvyksta  $n$  pilnų svyravimų (tada  $T_0 = \tau / n$ ), matavimo paklaidai.

Kiek sudėtingiau yra įvertinti ryšio stiprio  $K$  paklaidą, nes pagal (15) ir (16),  $K$  nustatomas su netiesiogiai išmatuotais fizikiniais dydžiais  $k, l, m, L$  ir  $f_0, f_c, f_1, f_2$ , ir tiksli paklaidos skaičiavimo formulė būtų gana sudėtinga. Todėl šiame darbe pakaks tarpusavyje palyginti apskaičiuotas ryšio stiprio vertes.



## Literatūra

1. A. Medeišis „Mechanika, molekulinė fizika, elektra ir magnetizmas. Fizikos praktikumas.“, Vilnius, *Vilniaus universiteto leidykla*, 2000, 353 p.
2. A. Matvejevas, „Mechanika ir reliatyvumo teorija“, Vilnius, *Mokslas*, 1982, 334 p.

