

18. Matematinės svyruoklės tyrimas

Užduotis

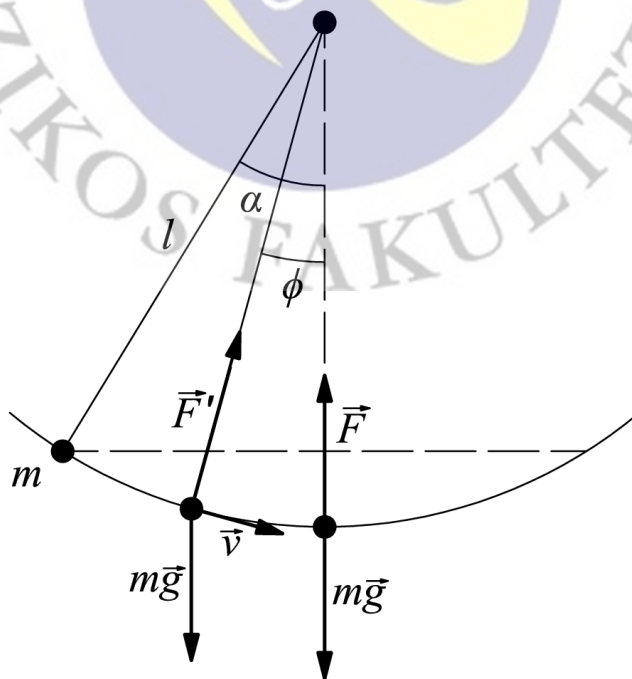
1. Nustatyti matematinės svyruoklės svyravimų periodo priklausomybę nuo siūlo ilgio, kai atsilenkimai nuo pusiausvyros padėties yra maži.
2. Nustatyti gravitacijos sukeliama pagreitį.
2. Nustatyti svyravimų periodo priklausomybę nuo atsilenkimų amplitudės.

Pagrindiniai teoriniai klausimai

1. Svyravimų klasifikacija.
2. Harmoniniai svyravimai, jų aprašymas panaudojant trigonometrines funkcijas ir kompleksinius skaičius.
3. Gravitacinė jėga, laisvojo kritimo pagreitis.
4. Matematinė ir fizinė svyruoklės, matematinės svyruoklės judėjimo lygtis.

Tyrimo metodika

Matematinė svyruokle vadinamas mažas kūnas, kurį dėl mažų matmenų galima laikyti materialiuoju tašku, pakabintas ant plono netašaus siūlo ir galintis svyruoti vertikaloje plokštumoje. Tokios svyruoklės pavyzdys - plieninis rutuliukas, pakabintas ant ilgo palyginti su jo spinduliu ($l \gg r$) bei lengvo palyginti su jo mase m netašaus siūlo (1 pav.). Pradinėje pusiausvyros padėtyje rutuliuką veikiančios sunkio jėga $m\vec{g}$ ir siūlo tamprumo jėga \vec{F}_0 atsveria viena kita. Atlėnkus svyruoklę kampu α ir paleidus, rutuliukas greitėja, tačiau jo mechaninė energija gravitaciniame lauke nekinta, ji tik pereina iš potencinės į kinetinę. Ji nekinta ir dėl siūlo tamprumo jėgos poveikio, nes ši jėga yra statmena rutuliuko greičiui.



1 pav. Matematinės svyruoklės judėjimo trajektorija ir veikiančios jėgos

Pagal mechaninės energijos tvermės dėsnį:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos \phi) = E_0 = \text{const}, \quad (1)$$

kur $I = ml^2$ yra inercijos momentas, o ϕ - atsilenkimo kampas. Kampinis greitis lygus nuliui, kai atsilenkimo kampas $\phi = \alpha$. Tada $E_0 = mgl(1 - \cos \alpha)$. Šią išraišką įstačius į (1) gauname:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2g(\cos \phi - \cos \alpha)}{l}}. \quad (2)$$

Laiko tarpas, per kurį įvyksta ketvirtis svyravimo, yra

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos \phi - \cos \alpha)}}. \quad (3)$$

Pažymėjus $k = \sin(\alpha/2)$, galima išreikšti svyravimų periodą taip:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k), \quad (4)$$

kur K yra pilnutinis pirmosios eilės elipsinis integralas. Integralą K išskleidę eilute turime

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}. \quad (5)$$

Mažų kampų α artėjimui ($\alpha \leq 2^\circ$) skliaustuose esanti suma lygi $\pi/2$, tai gauname

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} l^{1/2}, \quad (6)$$

o tai rodo, kad matematinės svyruoklės mažų svyravimų periodas yra tiesiai proporcingas kvadratinei šakniai iš sūlo ilgio.

Tyrimo eiga

Laboratoriniam darbui atlikti reikalingos priemonės yra parodytos 2 paveiksle. Plieninis rutuliukas yra pakabinamas ant žvejbiniio valo, pritvirtinto tarp stovo spaustuvų. Pritvirtinus rutuliuką prie naujo valo, reikia leisti jam pakabėti kelias minutes, nes valas truputį pailgėja. Svyrųoklės ilgis (tai liniuote išmatuotas valo ilgis plus pusė slankmačiu išmatuoto rutuliuko skersmens) turi būti išmatuotas prieš eksperimentą ir po jo, o matavimų rezultatai suvidurkinami. Svyravimų periodas matuojamas universalia optronine šakute, įjungta darbo režimu $\uparrow \square \square \square \downarrow$.



2 pav. Matematinės svyruoklės tyrimo priemonės

Išmatuokite svyruoklės mažų svyravimų ($\alpha \leq 2^\circ$) periodus T ne mažiau kaip penkiems svyruoklės ilgiams l (pvz. nuo 20 iki 70 cm kas 10 cm). Tyrimo rezultatus rašykite į lentelę:

1 lentelė. Matematinės svyruoklės periodo svyravimų periodo priklausomybės nuo svyruoklės ilgio tyrimo duomenys.

$l, \text{ m}$	$\sqrt{l}, \text{ m}^{1/2}$	$T, \text{ s}$

Matavimų rezultatus pavaizduokite kaip funkciją $T(\sqrt{l})$. Šią priklausomybę aproksimuokite tiese $T = A\sqrt{l}$. Remdamiesi lygtimi (6), apskaičiuokite laisvojo kritimo pagreitį:

$$g = \frac{4\pi^2}{A^2}. \quad (7)$$

Pasirinkite du skirtingus svyruoklės ilgius (pvz. 30 ir 70 cm) ir išmatuokite svyruoklės svyravimų periodus T , kai pradiniai siūlo atlenkimo kampai α prieš paleidžiant svyruoklę yra skirtingi $2 - 40^\circ$ ribose. Svyravimų paleidimo kampą keiskite nuo 2 iki 40 laipsnių kas 5 laipsnius. Tyrimo rezultatus rašykite į lentelę:

2 lentelė. Matematinės svyruoklės svyravimų periodo priklausomybės nuo svyruoklės atlenkimo kampo tyrimo duomenys.

$l, \text{ m}$	$\alpha, \text{ laipsniai}$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s (pagal (5))}$

Tame pačiame paveiksle pavaizduokite išmatuotų ir pagal (5) išraišką apskaičiuotų skirtingo ilgio svyruoklių svyravimų periodų priklausomybes nuo $\sin^2(\alpha/2)$ bei suformuluokite išvadas. Išmatuotas vertes vaizduokite taškais, o pagal (5) išraišką apskaičiuotas – ištisine linija.

Paklaidų įvertinimas

Kūnų laisvojo kritimo pagreičio paklaidą pagal (7) lemia daugiklio A nustatymo paklaida, o ji pagal (6) priklauso nuo svyruoklės ilgio ir svyravimų periodo matavimo paklaidų. Todėl

$$\Delta g = g \frac{2\Delta A}{A} = 2g \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}. \quad (8)$$

Literatūra:

1. A. Medeišis, „Mechanika, molekulinė fizika, elektra ir magnetizmas. Fizikos praktikumas“, Vilnius, *Vilniaus universiteto leidykla*, 2000, 353 p.
2. A. Matvejevas, „Mechanika ir reliatyvumo teorija“, Vilnius, *Mokslas*, 1982, 334 p.

