

Sukamojo judėjimo dinamikos dėsnio tikrinimas

Užduotis: 1) Oberbecko kryžmės pagalba patikrinti sukamojo judėjimo dėsnį. 2) Nustatyti kryžmės inercijos momento priklausomybę keičiant jos geometrinę konstrukciją.

1. Teorinis įvadas

Sukamojo judėjimo dinamikos dėsnis teigia, kad kūno kampinis pagreitis yra proporcingas jį veikiančių jėgų atstojamajam momentui ir atvirkščiai proporcingas kūno inercijos momentui:

$$I\vec{\epsilon} = \vec{M}. \quad (1)$$

Čia ϵ yra kūno kampinis sukimosi pagreitis [rad/s^2], M – kūną veikiančių jėgų atstojamasis momentas, I – kūno inercijos momentas.

Kūnas, kurio pagalba bus tikrinamas šis dėsnis, yra Oberbecko kryžmė, labiau žinoma kaip pagrindinė Oberbecko švytuoklės konstrukcijos dalis.

Ekspimento schema pavaizduota pav.1. Kryžmė (pavaizduota punktyrinėmis linijomis) sudaryta iš dviejų statmenų strypų, ant kurių vienodu atstumu x nuo sukimosi ašies pritvirtinti perkilnojami kroviniai (PK) ir spindulio R skridinys. Atstumą x galima keisti. Prie skridinio, pritvirtintos virvės, ant kurių kabo du svareliai turintys mases m_1 ir m_2 . Svareliai, veikiami sunkio bei virvės tempimo jėgų T_1 ir T_2 , be slydimo juda pagreičiu a . Svarelių judėjimo lygtys:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \quad (2)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a. \quad (3)$$

Virvės tempimo jėgų skirtumas skirtingose skridinio pusėse sukuria momentą M , kuris verčia skridinį su pritvirtinta švytuokle sukis. Sukimuisi priešinasi trinties jėgų momentas M_T veikiantis sukimosi ašyje. Kryžmės su skridiniu inercijos momentas I , o jos kampinis sukimosi pagreitis ϵ aprašomas judėjimo lygtimi:

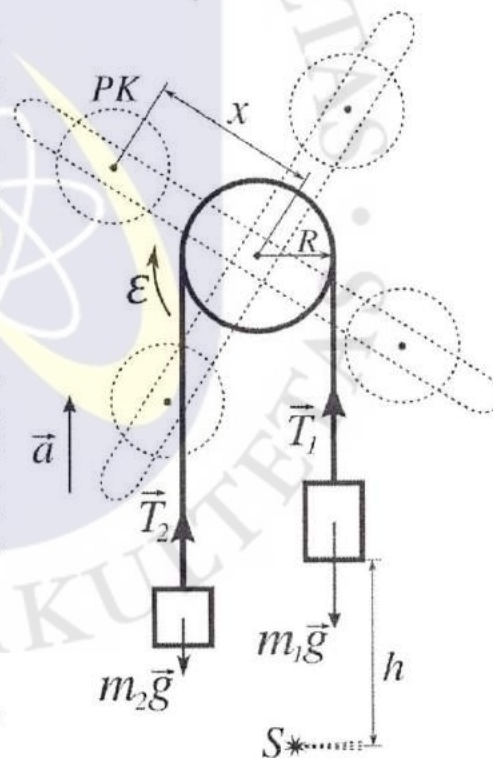
$$M - M_T = I\epsilon. \quad (4)$$

Tempimo jėgų atstojamasis momentas yra lygus:

$$M = (T_1 - T_2)R. \quad (5)$$

Kryžmės kampinio sukimosi ir svarelių judėjimo pagreičiai (nesant slydimui) yra susiję:

$$a = \epsilon R. \quad (6)$$



Pav.1 Ekspimento schema

Ekspimento metu pamatuojamas pirmojo svarelio leidimosi laikas t iš aukščio h iki optinio registratoriaus šviesos spindulio (S) (žr. pav. 1). Iš šių ekspimento duomenų apskaičiuojamas svarelių judėjimo pagreitis:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (7)$$

Žinant pagreitį a , randamas kryžmės kampinio sukimosi pagreitis ε (pagal (6)) ir tempimo jėgų momentas M (iš (2-3) ir (5)):

$$\varepsilon = \frac{a}{R}, \quad (8)$$

$$M = [(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R. \quad (9)$$

Taip iš eksperimento duomenų nustatyti dydžiai ε ir M atvaizduojami taškais grafinėje priklausomybėje $M(\varepsilon)$. Pasak švytuoklės judėjimo lygties (4), kurią šiame darbe derėtų traktuoti kaip teorinę hipotezę, eksperimento duomenis vaizduojantys taškai turėtų būti išsidėstę apytikriai vienoje tiesėje:

$$M = A + B\varepsilon, \quad (10)$$

kuriuos koeficientų A ir B vertes bei jų paklaidas ΔA ir ΔB reikia nustatyti iš grafiko. Žinant šiuos koeficientus, randamos švytuoklės inercijos momento I ir trinties jėgų momento M_T vertės (pagal (4)):

$$I = B \pm \Delta B, \quad (11)$$

$$M_T = A \pm \Delta A. \quad (12)$$

Koeficientų A ir B vertes bei jų paklaidas galima rasti pasinaudojus dauguma populiarių grafinių duomenų analizės kompiuterinių programų. Arba atlikus skaičiavimo procedūrą, kuri pateikta šio darbo Priede.

Pastaba. Mokslinėje literatūroje priimta y -ašyje atidėti kintamąjį, kuris priklauso nuo eksperimentuotojo keičiamo kintamojo. Šiame darbe eksperimentuotojas keičia masę ir tokiu būdu keičia jėgos momentą M , nuo kurio priklauso sukimosi pagreitis ε . Taigi, korektiška būtų brėžti ne $M(\varepsilon)$, bet $\varepsilon(M)$ priklausomybę. Šiame darbe tai nėra praktiška, kadangi tokiu atveju reikėtų atlikti papildomus aritmetikos veiksmus, norint iš tiesės koeficientų apskaičiuoti I ir M_T vertes.

Iš eksperimento duomenų nustatomas kryžmės inercijos momentas priklauso nuo perkilnojamų krovinų masės centrų atstumo x iki sukimosi ašies. Pagal Heigenso – Šteinerio teoremą, pakeitus atstuma x_1 į x_2 , kryžmės inercijos momentas turi pasikeisti:

$$I(x_2) - I(x_1) = m_{PK}(x_2^2 - x_1^2). \quad (13)$$

Čia m_{PK} yra bendra visų perkilnojamų krovinų ir juos tvirtinančių varžtų masė, kurią galima pamatuoti. Pastarąją priklausomybę taip pat galima patikrinti atlikus keletą eksperimentų su skirtingomis x vertėmis. Taip pat galima atlikti matavimus ir be perkilnojamų krovinų. Tada kryžmės inercijos momento pokytis atlikus matavimus su ir be perkilnojamų krovinų yra:

$$\Delta I = 4m_{PKI} \left(\frac{r^2}{2} + x^2 \right) + 4m_V x^2. \quad (14)$$

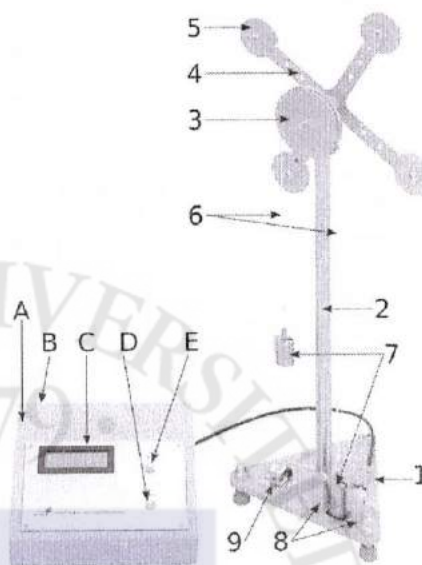
Čia m_{PKI} yra vieno perkilnojamo krovinio masė, pasvėrus jį be tvirtinančio varžto, m_V yra vieno tvirtinančio varžto masė, r – perkilnojamo krovinio spindulys.

2. Eksperimento eiga

Laboratorinio stendo aprašymas.

Laboratorinį stendą, pavaizduotą pav. 2, sudaro:

- 1) pagrindas su reguliuojamo aukčio kojomis,
 - 2) vertikalus stovas,
 - 3) skridinys,
 - 4) kryžmės rėmas,
 - 5) keturi vienodi perkilnojami kroviniai,
 - 6) virvės,
 - 7) kintamos masės kroviniai,
 - 8) optinis registratorius,
 - 9) elektromagnetas
- A) valdymo pultas,
 B) pulto maitinimo mygtas (ant galinės sienelės),
 C) laikmatis,
 D) parengties mygtas (СБРОС),
 E) paleidimo mygtas (ПУСК).



Pav. 2 Laboratorinis stendas

Oberbeko kryžmę sudaro skridinys 3, kryžmės rėmas 4 ir keturi vienodi perkilnojami kroviniai 5.

Sutvarkyta ir darbui paruošta stendo būseną: valdymo pultas A išjungtas; kintamos masės kroviniai sudėti jiems skirtoje taroje, ant virvių kabo tik laikantieji svareliai; dešinysis kintamos masės krovinio svarelis nuleistas iki pagrindo, kur jį prilaiko smūgius švelninanti magnetinė juostelė.

Pasiruošimas matavimui: mygtu B įjungiamas valdymo pulto maitinimas. Tuo pačiu įsijungia optinis registratorius 8 ir elektromagnetas 9. Pasirenkamas vienas ar keli žinomos masės svareliai ir uždedami ant dešiniojo laikantiojo svarelio. Sukant kryžmę kairysis svarelių krovinys nuleidžiamas ir pritraukiamas elektromagneto, dešinysis svarelių krovinys tuo pačiu pakyla aukštyn. Liniuote pamatuojamas aukštis nuo stendo pagrindo iki dešiniojo krovinio apačios. Taip pat pamatuojamas aukštis nuo stendo pagrindo iki optinio registratoriaus spindulio. Dešiniojo krovinio leidimosi aukštis h yra šių aukščių skirtumas. Sustabdomi dešiniojo krovinio šoniniai siūbavimai galimai atsiradę keliant jį aukštyn. Kairįjį krovinį laikanti virvė turi būti lengvai įsitempusi ir vertikali. Paspaudžiamas valdymo pulto parengties mygtas D, kuris nustato laikmatį C į nulinę padėtį.

Matavimo atlikimas: viena ranka priartinama prie skridinio ir pasiruošiama stabdyti įsisukusią kryžmę čiumpant skridinį. Kita ranka spaudžiamas paleidimo mygtas E, kuris išjungia elektromagnetą, įjungia laikmatį ir pasiunčia paleidimo signalą į optinį registratorių. Dešiniajam kroviniai nusileidus iki optinio registratoriaus spindulio šis siunčia stabdymo signalą laikmačiui. Akimirksniu po to, esant reikalui, paruošta ranka stabdoma įsisukusi kryžmė arba gaudomas įsibėgėjęs kairysis krovinys. Užrašomas laikmačio parodytas leidimosi laikas.

Matavimo ypatumai. 1) Dešiniojo krovinio leidimosi aukštį galima ženkliai padidinti (arba sumažinti) vieną kartą papildomai užvyniojus ant (arba nuvyniojus nuo) skridinio virvę. Didesnės aukščio vertės rekomenduojamos siekiant sumažinti santykinės aukščio ($\Delta h/h$) ir nusileidimo laiko ($\Delta t/t$) matavimo paklaidas. Kita vertus, esant didesniai aukščiui ir dideliui krovinų masės skirtumui yra būtina tuoj po matavimo ranka stabdyti įsibėgėjusį krovinį ar įsisukusią kryžmę. 2) Krovinius laikanti virvė pailgėja didinant krovinio svorį. Todėl kiekvieną kartą pakeitus krovinio svorį yra būtina pamatuoti jo leidimosi aukštį. Netgi kartojant matavimą su tuo pačiu krovinium

rekomenduojama pasitikrinti aukštį, kadangi vyniojant virvę ant skridinio, ji gali užlipti ant ankstesnės kilpos ar virvę laikančio varžto, kas lemia 1-3 mm aukščio pokyčius. 3) Varžtai, tvirtinantys skridinyje virvę, sukimosi metu gali ją stumtelti ir sukelti krovinio šoninius siūbavimus. 4) Dešinysis krovinys dėl šoninių siūbavimų kartais trenkiasi į optinio registratoriaus viršų prieš kirsdamas šviesos spindulį. Jeigu tokiu atveju pamatuotas leidimosi laikas ženkliai skiriasi nuo nusistovėjusio vidurkio, tada tokio matavimo rezultatą galima atmesti. 5) Kylant kairiajam kroviniumi jo šoniniai siūbavimai galimi, jeigu pasiruošiant matavimui krovinį kelianti virvė nebuvo vertikaloje.

Visi šie paminėti faktoriai ir trintis sukimosi ašyje lemia atsitiktinę leidimosi laiko matavimo paklaidą, kuri, esant mažam krovinų masių skirtumui, gali siekti iki 0.2 s ir yra gerokai didesnė už laikmačio sistemine paklaidą 0.01 s. Todėl, esant pasirinktam krovinų masių skirtumui, rekomenduojama atlikti po keletą leidimosi laiko matavimų apsiribojant tokiu jų kiekiu, kada nusistovi pastebimas rezultatų vidurkis ir atmetant tuos rezultatus, kurie žymiai skiriasi nuo šio vidurkio. Šiame laboratoriniame stende gali pritrūkti 5-10 leidimosi laiko matavimų esant mažam krovinų masių skirtumui ir gali pakakti 2-5 matavimų esant dideliame masių skirtumui. Todėl, taupant laiką, rekomenduojama vykdyti matavimus pasirenkant didesnių masių skirtumų krovinis.

Laboratorinio darbo atlikimas

1) Nukabinami nuo virvių ir pasveriami abu krovinis laikantieji svareliai, ir vėl pakabinami į savo vietas.

2) Suformuojamas ir pasveriamas iš vieno ar kelių svarelių sudarytas dešinysis krovinys ir uždedamas ant dešiniojo laikančiojo svarelio. Suskaičiuojami ir užrašomi krovinų masių skirtumas ir suma ir, kaip aprašyta aukščiau, atliekami krovinų leidimosi laiko matavimai iki kol nustatomas laiko vidurkis. Matavimai kartojami padidinus dešiniojo krovinio masę. Pakanka imti 5-7 skirtingas dešiniojo krovinio masių vertes. Norint atlikti daugiau matavimų galima suformuoti įvairesnių masių krovinis kraunant svarelius taip pat ir ant kairiojo laikančiojo svarelio. Iš kiekvieno matavimo rezultatų apskaičiuojami kryžmės kampinis sukimosi pagreitis ε ir ją veikiančių jėgų momentas M ir grafiškai atidedama $M(\varepsilon)$ (arba $\varepsilon(M)$) priklausomybė, iš kurios, atlikus skaitmeninę analizę, nustatomos I ir M_T vertės. Tame pačiame brėžinyje galima pavaizduoti keletą skirtingų $M(\varepsilon)$ (arba $\varepsilon(M)$) priklausomybių grafikų atitinkančių matavimų duomenis gautus keičiant kryžmės inercijos momentą.

3) Matavimų serija aprašyta 2) pastraipoje kartojama pakeitus kryžmės inercijos momentą. Tai daroma keičiant keturių perkilnojamų krovinų 5 padėtis vienodu atstumu. Atstumai x nuo perkilnojamų krovinų masės centrų tvirtinimo vietų iki kryžmės sukimosi ašies yra 5 cm, 7,5 cm, 10 cm ir 12,5 cm. Pirmą kartą nuėmus krovinis jie visi drauge su tvirtinančiais varžtais pasveriami ir užsirašoma masė m_{PK} . Iš eksperimento domenų nustačius $I(x)$ vertes skaičiuojami jų pokyčiai ir palyginami su teoriškai apskaičiuojamomis $I(x)$ pokyčio vertėmis pagal (13) Likus laiko galima patikrinti inercijos momento pakyčio vertę (14) atliekant matavimus su nuimtais nuo kryžmės rėmo perkilnojamais kroviniais.

Griežtai draudžiama tvirtinti perkilnojamus krovinis nesimetriniu sukimosi ašies atžvilgiu būdu!

4) Papildoma užduotis. Pagal gamintojo pateiktus stendo parametrus apskaičiuoti kryžmės inercijos momentą tiek su perkilnojamais kroviniais tiek be jų. Stendo parametrai:

skridinys:	605 g, 8 cm	(masė ir diametras);
sukimosi ašies strypas:	45 g, 1 cm	(masė ir diametras);
kryžmės rėmas:	230 g, 27 cm	(bendra masė, ir diametras);
perkilojamas krovinys:	82 g, 5 cm	(masė ir diametras).

Gamintojas nepatikslina, kaip įskaičiuojama perkilnojamus krovinis tvirtinančių varžtų masė, kuri yra apie 12 g ir gali įtakoti skaičiavimo rezultatą.

Priedas. Tiesinės priklausomybės parametrų nustatymas iš eksperimento duomenų.

Eksperimentiniu būdu tikrinama teorinė hipotezė, pagal kurią dydžiai x ir y yra susiję dėsnio

$$y = A + Bx .$$

Pamatuojamos N susijusių dydžių (x_i, y_i) poros ir surašomos į lentelę (x ir y stulpeliai):

Nr.	x	y	x^2	y^2	xy
1	x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	x_1y_1
i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
N	x_N	y_N	x_N^2	y_N^2	x_Ny_N
Vidurkiai:	$\langle x \rangle$	$\langle y \rangle$	$\langle x^2 \rangle$	$\langle y^2 \rangle$	$\langle x \cdot y \rangle$

Po to šie duomenys atidedami grafike, ir jeigu jame išryškėja tiesinė $y(x)$ priklausomybė, tada galima nustatyti tos priklausomybės koeficientus. Tai daroma šitaip. Lentelė baigiama pildyti apskaičiuotais kiekvieno matavimo x_i^2, y_i^2 ir x_iy_i vertes, bei visų stulpelių vidurkius:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad \langle y^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2, \quad \langle x \cdot y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i .$$

Suskaičiuojami koreliaciniai koeficientai:

$$D_{xy} = \langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle, \quad D_{xx} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad D_{yy} = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 .$$

Tada tiesinės priklausomybės $y = A + Bx$ koeficientų A ir B vertės yra:

$$B = \frac{\langle x \cdot y \rangle - \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{D_{xy}}{D_{xx}}, \quad A = \langle y \rangle - B \cdot \langle x \rangle .$$

Koeficientų A ir B paklaidos (vidutiniai kvadratiniai nuokrypiai):

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{N-2} \left(\frac{D_{yy}}{D_{xx}} - B^2 \right) = \frac{B^2}{N-2} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right), \quad (\Delta A)^2 = (\Delta B)^2 \cdot \langle x^2 \rangle .$$

Determinacijos koeficientas:

$$R^2 = \frac{D_{xy}^2}{D_{xx} \cdot D_{yy}}$$

yra tuo artimesnis vienetui, kuo geriau eksperimentiniai taškai grafike guli išilgai teorinės tiesės (koeficientų A ir B paklaidos artėja į nulį).

Gali atsitikti taip, kad vieno ar kelių matavimų duomenys grafike yra žymiau nukrypę visų kitų, gerai aprašomų teorine hipoteze $y = A + Bx$. Tokiu atveju tuos duomenis analizės metu galima atmesti.